MA1 cvičení - derivace funkce a užití derivace (2) .

I. Výpočet limit funkcí užitím L´ Hospitalova pravidla:

Vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln 3x}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(2+3x^3)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln x}{\ln(\sin x)}$; $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sin(2x)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x^2}-1}{\sin(x^2)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-arctg\, x}{x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to0+}x^2\ln x$; $\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{x}\cdot\ln x$; $\lim\limits_{x\to0+}x^a\cdot\ln x$ $(a>0)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,\ln(1-\dfrac{2}{x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\arcsin\dfrac{1}{x}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\,e^{-x^2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\,e^x$; $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$;

d)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(arctg\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; $\lim\limits_{x\to0+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x-2x\right)^{\frac{1}{2x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$; $\lim\limits_{x\to0+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

II. Spojitost funkce, výpočet derivací a dopočítávání derivací ve „špatných“ bodech – další příklady:

1. Je dána funkce f předpisem : $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ *pro* $x\neq0$, $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

   Ukažte, že funkce f je v bodě $x_0=0$ spojitá .

2. Funkce f je definována : $f(x)=arctg\dfrac{1}{x^2}$, pokud $x\neq0$ a $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

   Ukažte, že f je spojitá v R a dále zjistěte, pro která $x\in R$ existuje derivace, případně jednostranné derivace $f'_+(x)$ nebo $f'_-(x)$. Tyto derivace spočítejte.

3. Funkce f je definována : $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$, pokud $x\neq0$ a $f(0)=0$.

   Ukažte, že f je spojitá v R a dále zjistěte, pro která $x\in R$ existuje derivace, případně jednostranné derivace $f'_+(x)$ nebo $f'_-(x)$. Tyto derivace spočítejte.

III. Vyšetřování průběhu funkce:

Vyšetřete průběh funkce ($\exp(x)=e^x$):

$f(x)=:$ $x+\dfrac{1}{x^2}$; $\dfrac{1}{x}+4x^2$; $\dfrac{x}{x^2-1}$; $\dfrac{|x|}{x^2-1}$; $\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|$; $\dfrac{1}{x^2+1}$; $\dfrac{x}{x^2+1}$; $\dfrac{x^3}{x^2-1}$; $\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$; $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$;

$f(x)=:$ x^2e^{-x}; e^{-x^2} ; xe^{-x^2}; $e^{\frac{1}{x}}$; $e^{\frac{1}{x}}-x$; $\dfrac{e^{-x}}{2-x}$; $(x+1)\cdot e^{\frac{1}{x}}$; $*\exp\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$; $*\,|x|e^{-|x-1|}$;

$f(x)=:$ $x+\sin x$; $x-2arctg\,x$; $arctg\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $arctg\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$; $arctg\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; (*) $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$;

$f(x)=:$ $x\ln x$; $x-\ln(x+1)$; $\dfrac{x}{\ln x}$.

IV. (*) Několik příkladů na vyšetřování extrémů funkcí:

1. Na grafu funkce $y = x^2$ najděte bod, nejbližší bodu $A[6,3]$.
2. Najděte válec daného objemu s nejmenším povrchem.
3. Jaké čtverce v rozích čtvercového papíru máme vystřihnout, abychom složili krabičku (bez víka) maximálního objemu?
4. Do koule daného poloměru R vepište válec maximálního objemu (nebo s maximálním povrchem).
5. Jaký maximální objem může mít kužel, je-li dána jeho strana?
6. Do daného kuželu vepište válec (tak, že základna válce je část základny kuželu) maximálního objemu.
7. Dešťová kapka s počáteční hmotností m_0 padá volným pádem (z dostatečné výšky) a přitom se vypařuje – hmotnost kapky v čase t je dána vztahem $m(t) = m_0 - kt$, $k > 0$. Kdy bude mít kapka největší kinetickou energii?
8. Odvoďte Snellův zákon lomu světla: Při průchodu paprsku světla z prostředí I (s rychlostí šíření světla v_1) do prostředí II (s rychlostí šíření světla v_2) projde paprsek rozhraním mezi I a II v bodě P, kde platí $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$, kde α_1, resp. α_2, je úhel, který svírá paprsek v prostředí I, resp. v II, s kolmicí v bodě P rozhraní, a rovina lomu splývá s rovinou dopadu.
   (Užijte Fermatův princip: dráha, kterou projde paprsek z bodu A v prostředí I do bodu B v prostředí II je dráha, kterou paprsek projde za nejkratší čas.)
9. Při opakovaném měření veličiny a získáme hodnoty $a_1, a_2, \dots a_n$. Za nejlepší aproximaci veličiny a vezmeme tu, pro níž součet druhých mocnin absolutních chyb je nejmenší. Určete tuto aproximaci.
10. Četnost molekul o rychlosti v je rovna $Kv^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$ (m je hmotnost molekuly, T absolutní teplota, $k > 0$, $K > 0$ konstanty). Pro kterou rychlost je četnost největší?
11. Pro který elevační úhel α při šikmém vrhu je délka vrhu největší?
12.* V rovině je dán bod $A[a,b]$, $a > 0$, $b > 0$. Kdy bude mít pravoúhlý trojúhelník OPQ (O je počátek s.s., P leží na ose x, Q leží na ose y a bod A je bodem přepony PQ) nejmenší obsah?
13.* Z chodby o šířce a kolmo odbočuje chodba o šířce b. S jak dlouhou tyčí (zanedbatelného průřezu, nesenou vodorovně) je možné zatočit z chodby o šířce a do chodby o šířce b ?

V. Najděte Taylorův polynom 3. stupně v bodě a pro funkci f, je-li

a) $f(x) = e^x$, $a = 0$;

b) $f(x) = e^{-x}$, $a = 0$;

c) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a = 0$;

d) $f(x) = \ln(1+x)$, $a = 0$;

e) $f(x) = \ln(1 + 3\sin x)$, $a = 0$;

f) $f(x) = \sqrt{\cos x}$, $a = 0$;

g) $f(x) = arctg\, x$, $a = 0$;

h) $f(x) = arctg\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$, $a = 0$.